Matematica finanziaria: svolgimento degli esercizi 12, 15, 18, 19 e 22

Esercizio 12. Un capitale di 100€ può essere investito per due anni nei seguenti modi.

1. In regime esponenziale, al tasso mensile di interesse del 2%.
2. In regime esponenziale, al tasso nominale annuo del 20% pagabile semestralmente, e reinvestendo le cedole in regime lineare al tasso mensile del 5%.

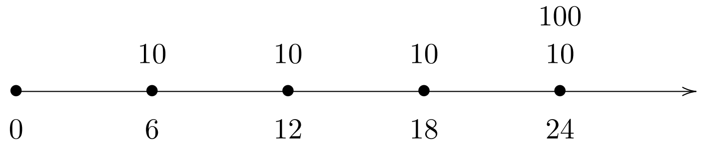
Qual è l'investimento "migliore"?

Svolgimento. Il punto 1 è immediato. In regime esponenziale il montante è

$$M_1 = 100(1 + 0.02)^{24} = 160.844.$$

Notare che abbiamo usato come unità di misura temporale il mese, visto che avevamo il tasso mensile e non annuale!

Nel caso 2, invece, si ha a che fare con un tasso d'interesse *nominale*: 20% di 100€ significa 20€ "all'anno", e pagabili semestralmente significa che ogni 6 mesi si incasserà una cedola di 10€. Alla fine del periodo d'investimento, inoltre, ci verrà restituito il capitale iniziale di 100€. Il grafico di questo investimento è dunque



Notare che conviene usare come unità di misura il mese, visto che il tasso di reinvestimento è mensile, e dunque la prima cedola viene incassata al tempo 6 mesi (cioè un semestre) e così via.

I ricavi intermedi (le cedole semestrali di 10€) vanno reinvestiti tramite la legge $r(t) = 1 + 0.05t$ (dove t misura il tempo, come già detto, in mesi). La prima cedola essendo capitalizzata per 18 mesi, fornirà un montante di $10(1 + 0.05 \cdot 18)$, la seconda fornirà un montante di $10(1 + 0.05 \cdot 12)$, e così via. Il montante finale sarà

$$\begin{aligned} M_2 &= 10(1 + 0.05 \cdot 18) + 10(1 + 0.05 \cdot 12) + 10(1 + 0.05 \cdot 6) + 10 + 100 \\ &= 40 + 0.05 \cdot 10 \cdot 6 \cdot (3 + 2 + 1) + 100 = 158. \end{aligned}$$

Dal punto di vista del montante finale, dunque, l'investimento migliore è 1. ■

Esercizio 15. Si supponga una legge finanziaria $r(t) = 1 + t^3$, con t che misura i mesi. Calcolare il valore tra 8 mesi di un capitale che tra 3 mesi varrà 100€.

Svolgimento. Ci viene dato un valore C tra 3 mesi, e ci viene chiesto il valore equivalente tra 8 mesi. Se avessimo una legge in 2 variabili $r(x, y)$, si tratterebbe solo di calcolare $Cr(3, 8)$. Invece ci viene data una legge $r(t)$ in una variabile, e l'unico modo per rispondere è calcolare il valore attuale di C, per poi ricapitalizzarlo di 8 mesi.

In pratica, stiamo calcolando il montante di proseguimento $M(3, 8)$, relativo alla legge data. Il montante di proseguimento, come detto, si ottiene scontando 100€ di 3 mesi, e poi capitalizzando il risultato per 8 mesi. Dunque

$$M(3, 8) = \frac{100}{r(3)} r(8) = \frac{100}{1 + 3^3}(1 + 8^3) = \frac{12825}{7}.$$

Notare che poiché $r(t)$ non è scindibile (non è esponenziale), il montante di proseguimento è diverso da quello che si otterrebbe semplicemente capitalizzando i 100 euro per i restanti 5 mesi:

$$M(3, 8) \neq 100(1 + 5^3) = 12600.$$

■

Esercizio 18. Supponiamo di sapere che tra 6 mesi, 1 anno, 18 mesi, 2 anni avremo bisogno rispettivamente di 19€, 16€, 13€, 110€. Qual è l'investimento "migliore" nell'esercizio 12?

Svolgimento. Dobbiamo considerare le stesse operazioni finanziarie dell'esercizio 12, alle quali dobbiamo però aggiungere i prelievi richiesti nel testo. Per essere precisi, dobbiamo anche assumere qualcosa di non detto: che dopo aver fatto i prelievi suddetti si possano reinvestire i capitali alle stesse condizioni (cosa assolutamente non scontata!). Assumendo questo, l'operazione finanziaria 1 diventa:

$$
\begin{array}{ccccc}
100 & -19 & -16 & -13 & -110 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \longrightarrow \\
0 & 6 & 12 & 18 & 24
\end{array}
$$

Se il montante finale di questa operazione viene positivo, vuol dire che possiamo prelevare i soldi che ci servono, e ci resta pure qualcosa! Se viene negativo, vuol dire che questa operazione non ci permette i prelievi suddetti (a un certo punto i soldi finiscono!).

Il montante finale è:

$$M_1 = 100(1 + 0.02)^{24} - 19(1 + 0.02)^{18} - 16(1 + 0.02)^{12} - 13(1 + 0.02)^{6} - 110 = -11.2249$$

e dunque con questa operazione non possiamo soddisfare la nostra richiesta!

Il caso 2, invece, è leggermente più complicato. Al tempo 6 mesi, noi preleveremo 19 €, ovvero toglieremo 9€ al capitale iniziale (10€ ce li da la cedola). Dunque al tempo 6 noi investiremo solo 91€! Questo fa si che la cedola successiva sia di 9.1€, non più di 10! Continuando questo ragionamento, il grafico di 2 diventa:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & -110 \\
 & -19 & -16 & -13 & 79.51 \\
100 & 10 & 9.1 & 8.41 & 7.951 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \longrightarrow \\
0 & 6 & 12 & 18 & 24
\end{array}
$$

Non essendoci reinvestimenti (ogni volta preleviamo tutta la cedola, e intacchiamo anche il capitale!) il montante finale è semplicemente:

$$M_2 = 79.51 + 7.951 - 110 = -22.539$$

e dunque neanche con questa operazione possiamo soddisfare la nostra richiesta!

La risposta finale è che nessuno dei due investimenti è adeguato alla nostra richiesta di avere tra 6 mesi, 1 anno, 18 mesi, 2 anni rispettivamente 19€, 16€, 13€, 110€. ■

Esercizio 19. Investo 700€ e dopo un anno ne ottengo 800. Oppure investo 100€ e dopo un anno ne ottengo 150. Qual è l'investimento "migliore"?

Svolgimento. Risposta elementare: il primo investimento mi ha reso un interesse percentuale

$$i_1 = 100/700 = 1/7,$$

il secondo un interesse percentuale

$$i_2 = 50/100 = 5/10 > i_1$$

(entrambi su un anno), quindi il secondo è migliore.

Risposta più elaborata: dipende! Dal punto di vista del tasso d'interesse, il secondo è migliore. Ma se ci servono 100€ tra 1 anno, il primo è migliore! Inoltre, se si possono investire 700€, bisogna considerare che alla seconda ipotesi di investimento dobbiamo aggiungere cosa fare dei restanti 600!

Risposta sbagliata: il primo è migliore, perché ci fa guadagnare di più! ■

Esercizio 22. Decido di investire 100€ tra 6 mesi, sapendo che renderanno il 4% annuo, e so che il mercato usa un regime dato da

$$r(x, y) = \frac{1 + iy}{1 + ix}$$

Quale sarà il montante tra tre anni e mezzo?

Svolgimento. L'esercizio è incompleto, perché manca l'indicazione "x e y misurano il tempo in…". Supponiamo che x e y misurino il tempo in anni. Allora $i = 0.04$, e visto che 6 mesi corrispondono a 0.5 anni si ha:

$$M = 100r(0.5, 3.5) = \frac{100(1 + 0.04 \cdot 3.5)}{1 + 0.04 \cdot 0.5}$$

■